Capítulo 8

ESPAÇOS VECTORIAIS

$\mathbb{R}^n \longrightarrow$? Espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$?

Definição:

Seja E um conjunto não vazio e $\mathbb{K} \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Suponha-se definidas em E duas operações:

- adição em E, que ao par (u, v) de elementos de E associa um único elemento $u + v$ pertencente a E.

$$+ : (u, v) \longrightarrow u + v$$

- multiplicação externa, que a cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in E$ associa um único elemento αu pertencente a E.

$$. : (\alpha, u) \longrightarrow \alpha u$$

E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ se

1. A **adição** em E verifica
   - A1) a operação $+$ é associativa
   - A2) a operação $+$ é comutativa
   - A3) existe elemento neutro para a operação $+$
   - A4) todo o elemento de E tem oposto para a operação $+$

2. A **multiplicação externa** verifica
   - M1) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
   - M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
   - M3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
   - M4) $\forall u \in E, \quad 1.u = u \quad$ (sendo 1 o número real)

Exemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial real.

2. $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes com entradas reais com a soma e o produto habituais é um espaço vectorial real.

3. $\mathbb{R}_n[x]$ o conjunto de todos os polinómios na variável x, com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 : a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\},$$

Quais as operações?

P(x)= $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$,

Q(x)= $b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ P(x)+Q(x)= ?

- P(x)+Q(x)= $(a_n+b_n)x^n+\ldots+(a_1+b_1)x$ + (a_0+b_0)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, αP(x)= ?

- αP(x)= $(\alpha a_n)x^n + \ldots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)$

$\mathbb{R}_n[x]$ é um espaço vectorial real.

4. $\mathbb{R}[x]$, o conjunto de todos os polinómios na variável x, com coeficientes reais (sem restrição de grau) e com as operações generalizadas de $\mathbb{R}_n[x]$, é um espaço vectorial real.

5. $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^3$,..., $\mathbb{C}^n$ são espaços vectoriais reais mas também complexos

Teorema:

Sejam $(E,+,.)$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $u,v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

1. $\alpha 0_E = 0_E$;
2. $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$;
3. $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$;
4. $\alpha u = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$.

Definição:

Sejam $(E,+,.)$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto não vazio de E. Então, W é subespaço de E se, e só se,

1. $\forall u,v \in W, \qquad u+v \in W$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in W, \qquad \alpha u \in W$.

Observações:

1. Se $(E,+,.)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e W é um subespaço de E então $(W,+,.)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$

2. As definições de combinação linear, independência linear, conjunto gerador e base são análogas às dadas em $\mathbb{R}^n$.

Exemplos:

1. Em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base. Efectivamente, qualquer matriz de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

pelo que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle$. **4 Geradores**

Além disso são linearmente independentes pois

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Assim,

$$\boxed{\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4 \text{ e } M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle.}$$

2. O espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$ é gerado pelos polinómios

$$\underline{1, x, x^2}$$

pois qualquer polinómio de $\mathbb{R}_2[x]$ é da forma

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0.1$$

(escreve-se como combinação linear de $1, x, x^2$).
Além disso são linearmente independentes pois se

$$\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.1 = 0$$

pode concluir-se (?) que

$$\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 0.$$

Assim, $\mathbb{R}_2[x] = \langle x^2, x, 1 \rangle$ e $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$.

3 Geradores lineramente independentes= Base

3. O espaço vectorial **complexo** $\mathbb{C}^2$ é gerado pelos vectores

$$\underline{e_1 = (1,0), \ \ e_2 = (0,1)}$$

pois qualquer vector de $\mathbb{C}^2$

$$(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i)(1,0) + (a_2 + b_2 i)(0,1)$$

(é combinação linear de e_1 e e_2).
Além disso, se

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0) \text{ então } (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$$

logo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Assim, $\mathbb{C}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$ e $\dim \mathbb{C}^2 = 2$.

Definição:

Um espaço vectorial E é de **dimensão finita** se tem uma base com um número finito de vectores. Caso contrário diz-se de **dimensão infinita**.

O espaço vectorial $\mathbb{R}[x]$ é de **dimensão infinita**

Aplicações Lineares (em espaços vectoriais gerais)

Definição:

Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre o mesmo conjunto $\mathbb{K}$ e

$$f : E \longrightarrow E' \text{ uma aplicação.}$$

f diz-se **aplicação linear** se

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\alpha u) = \alpha f(u);$
2. $\forall u, u' \in E, \quad f(u + u') = f(u) + f(u').$

Exemplos:

Seja

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 & \longmapsto & (a_2, a_1, a_0). \end{array}$$

Facilmente se prova que f é aplicação linear bijectiva.

$\boxed{\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3.}$

Definição:

Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre o mesmo conjunto $\mathbb{K}$ e

$$f : E \longrightarrow E' \text{ uma aplicação linear.}$$

Dizemos que E é isomorfo a E', ou que f é um isomorfismo se f é bijectiva. Denotamos por $\boxed{E \cong E'.}$

Teorema:

Qualquer espaço vectorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Observação:

O Teorema afirma que dado um espaço vectorial real de dimensão n, podemos pensar nele como se fosse o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$